Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1 / 3
Adres:	Studierichting:	Tentamen: PDV midtoets
Postcode en		Datum: 13 - 05 - 2003
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent: H.S.V. de Snoo

1) $u \cdot u_x + u_y = 1 \qquad u(x,0) = \frac{1}{2}x$

De initial data kan worden geparametriseerd als:

$x_0(s) = s \qquad y_0(s) = 0 \qquad u_0(s) = \frac{1}{2}s$

Nu op te lossen:

$$\begin{cases} x'(\tau) = u \\ y'(\tau) = 1 \\ u'(\tau) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} y(\tau,s) = \tau \\ u(\tau,s) = \tau + \frac{1}{2}s \end{array}$$

$$\Longrightarrow x'(\tau) = \tau + \tfrac{1}{2}s \Longrightarrow x(\tau,s) = \tfrac{1}{2}\tau^2 + \tfrac{1}{2}\tau s + s$$

$y = \tau$

$x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}ys + s = \frac{1}{2}y^2 + s\left(\frac{1}{2}y + 1\right)$

$$\Longrightarrow s = \frac{x - \frac{1}{2}y^2}{\frac{1}{2}y + 1}$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = y + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \frac{1}{2}y^2}{\frac{1}{2}y + 1}\right)$$

z.o.z...

2 a

Gegeven de pdv:

$$(1+x^2)(4+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (5+2x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$a(x,y) = (1+x^2)(4+x^2)$$
$$2b(x,y) = (5+2x^2) \implies b(x,y) = \frac{5}{2}+x^2$$
$$c(x,y) = 1$$

$$b^2 - ac = \left(\frac{5}{2}+x^2\right)^2 - (1+x^2)(4+x^2)$$
$$= \frac{25}{4} + 5x^2 + x^4 - (4 + 5x^2 + x^4)$$
$$= \frac{25}{4} - 4 = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

Conclusie: de gegeven pdv is hyperbolisch

b

De karakteristieken worden gegeven door de volgende twee gewone dv'en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$$

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{5}{2}+x^2+\sqrt{\frac{9}{4}}}{(1+x^2)(4+x^2)} = \frac{4+x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$\implies \boxed{y = \operatorname{arctg}(x) + K_1}$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{5}{2}+x^2-\sqrt{\frac{9}{4}}}{} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} = \frac{1}{4+x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}x^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1+(\frac{1}{2}x)^2}$$

$$\implies y = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+(\frac{1}{2}x)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{2\,d(\frac{1}{2}x)}{1+(\frac{1}{2}x)^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x\right) + K_2}$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2/3
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

3]

Gegeven het beginwaarde probleem:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Dit probleem heeft volgens d'Alembert de volgende oplossing

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) \right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

In ons geval: $c = 1$ $\quad u(x,0) = e^{-x^2}$

$$u_t(x,0) = xe^{x^2}$$

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2} \right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} se^{s^2}\, ds$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2} \right] + \left[\tfrac{1}{2}e^{s^2} \right]_{x-t}^{x+t}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2} \right] + \tfrac{1}{2}\left[e^{(x+t)^2} - e^{(x-t)^2} \right]$$

$$= \frac{e^{(x+t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2} - \frac{e^{(x-t)^2} - e^{-(x-t)^2}}{2}$$

$$= \cosh(x+t)^2 - \sinh(x-t)^2$$

conseq!

4)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \\ u(x,0) = 0 \qquad u_x(0,t) = 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) \qquad u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Pas scheiding van variabelen toe. Stel : $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\Longrightarrow \quad X''(x)\,T(t) = T''(t)\,X(x) \Longrightarrow$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \text{constant} \equiv K$$

eerst oplossen : $\begin{cases} X''(x) - K\,X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$

$K > 0 \Longrightarrow X(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x}$

$K = 0 \Longrightarrow X(x) = C_1 x + C_2$

$K < 0 \Longrightarrow X(x) = C_1 \cos(\sqrt{|K|}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{|K|}\,x)$

Als we de randvoorwaarden in acht nemen, dan zien we dat er alleen niet-triviale oplossingen bestaan als $K < 0$

Stel nu $K = -\lambda^2 \quad (\lambda > 0)$

$$\Longrightarrow X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)$$
$$X'(x) = -\lambda C_1 \sin(\lambda x) + \lambda C_2 \cos(\lambda x)$$

$X'(0) = 0 \Longrightarrow \lambda C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$

$X'(\pi) = 0 \Longrightarrow -\lambda C_1 \sin(\lambda \pi) = 0$

dit geeft alleen niet-triviale oplossingen als we eisen dat $\lambda\pi = n\pi \Longrightarrow \lambda_n = n$

$$\Longrightarrow X_n(x) = C_n \cos(nx)$$

$$T_n(t) = D_n \cos(nt) + \tilde{D}_n \sin(nt)$$

$$\Longrightarrow u_n(x,t) = X_n(t)\,T_n(t) = [\,a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\,]\cos(nx)$$

$$(\,a_n = C_n D_n\,, \quad b_n = C_n \tilde{D}_n\,)$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/3
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

Superpositie van de elementaire oplossingen geeft de volgende formele Fourierreeks:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right] \cos(nx)$$

$$u(x,0) = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = 0 \implies a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cdot \cancel{\sin} \cos(nt) \cos(nx)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos(nx) = \psi(x)$$

$$\implies b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \cos(nx)\, dx$$